به نام خدا

آزمون پایانی درس مدل‌سازی زیستی- دوره‌ی طلا 18 اسفند 1400

نام و نام‌خانوادگی: مدت آزمون: 135 دقیقه

توضیحات مهم:

- **حتما نام و نام‌خانوادگی خود را بالای این صفحه بنویسید.**
- آزمون از دو بخش ریاضیات و مدلسازی تشکیل شده است و مجموعا ۱۹۰ نمره است.
- چک‌نویس‌ها در انتهای پاسخبرگ ضمیمه شده اند. تنها مجاز به استفاده از این چک‌نویس‌ها هستید. تمامی محاسبات خود را در آن انجام دهید و **محدوده‌ی محاسبات مربوط به هر سوال را به طور واضح مشخص کنید.**
- در هر سوال تنها خواسته‌ی سوال و جواب نهایی را بنویسید و از نوشتن از هرگونه توضیحات یا محاسبات اضافه خودداری کنید.
- قبل شروع به حل سوالات خواسته‌ها را در پاسخبرگ را بخوانید.
- معمولا نمره‌ی سوالاتی که جواب صریح دارند، فقط به جواب کامل سوال تعلق می‌گیرد و جواب‌های ناکامل نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- در هر سوال تنها یک پاسخ بنویسید و آن را به طور واضح مشخص کنید. در صورت مشخص بودن بیش از یک جواب، نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- حتما به شماره‌ی سوالات و بخش آن‌ها دقت داشته باشید. به پاسخ‌های جابه‌جا نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- به محتویات و محاسبات چک‌نویس‌ها نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد و فقط پاسخبرگ معیار نمره‌دهی است.
- در پایان آزمون دفترچه سوالات و پاسخبرگ را تحویل مسئول آزمون دهید.
- در ابن آزمون استفاده از ماشین حساب **مجاز نیست.**

بخش ریاضیات

الف) انتگرال‌ها و مشتق‌های زیر را حساب کنید و تا حد امکان ساده کنید. (۴۷ نمره) (نمره منفی ندارد)

1. $\frac{d}{dt}\left(\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}\right)$ (۵ نمره)
2. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{2\sin^2(3x)}\right)$ (۷ نمره)
3. $\frac{d^3}{dx^3}(\sin(ax+b))$ (۵ نمره)
4. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-3}{x^4}-4cosx\right)dx$ (۶ نمره)

یکی از راه‌های حل انتگرال‌هایی که به طور معمول به دست نمی‌آیند، استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء(Integration by parts) است. اگر دو تابع $V_{(x)}$ و $U_{(x)}$ مشتق‌پذیر باشند و مشتقشان $V'_{(x)}$ و $U'_{(x)}$ باشد، داریم:

به طور مثال:

$$\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x = e-(e-1) = 1$$

که در آن :

5. $\int_1^2 x\,lnx$ dx (۴ نمره)
6. $\int e^x x^2 dx$ (۹ نمره)
7. $\int_0^2 e^x x^2 dx$ (۲ نمره)

ب) دستگاه معادله‌ی زیر را حل کنید. (۹ نمره)

$$x_{n+1} = 2x_n + y_n$$
$$y_{n+1} = 3x_n + 2y_n$$

شرایط اولیه: $x_1 = 2, y_1 = 1$

بخش مدلسازی:

سوال یک: (37 نمره)

برخی جانداران تک‌سلولی هم مانند بعضی از باکتری‌ها، توانایی حرکت به سمت مقصدی خاص و یا دورشدن از محلی خاص را دارند. به این توانایی chemotaxis گفته می‌شود و مزیت‌های تکاملی بسیاری دربردارد. Chemotaxis هم می‌تواند برای گریزاز ماده‌ای باشد و هم می‌تواند برای جذب به سمت ماده‌ای خاص باشد.

الف) در ابتدا مدلی یک بعدی را بررسی می‌کنیم. فرض کنید باکتری روی محور x حرکت می‌کند و مکان آن را با x_B نشان می‌دهیم. همچنین فرض می‌کنیم که غلظت ماده‌ی سمی روی محور به شکل تابعی از مکان است و آن را با $C(x)$ نشان می‌دهیم. همچنین تنها عامل حرکت باکتری را هم فرایند Chemotaxis درنظر می‌گیریم.

اگر $C(x) = \frac{b}{a+|x+d|}$ باشد، آنگاه:

1- نمودار تقریبی Cبرحسبx را به طور تقریبی به ازای $a = 2\,, b = 3, d = -2$ رسم کنید. اگر فرض کنیم که این توزیع غلظت از انتشار ماده سمی از یک نقطه با مکان ایجاد شده، مکان نقطه‌ی اولیه ماده سمی و غلظت در آن را معین کنید. (۱۵ نمره)

- **در ادامه‌ی بخش الف، توزیع غلظت را $C(x) = \frac{b}{a+x}, a, b > 0$ و فقط برای $x \geq 0$ در نظر بگیرید و $x_B(t) = \sqrt{t}$.**

2- در این حالت مبدا انتشار ماده‌ی سمی در چه مکانی قرار دارد؟(۱ نمره)

3- معادله‌ی سرعت حرکت باکتری را برحسب زمان($v_B(t)$) را به دست آورید. سپس معادله‌ی سرعت باکتری را برحسب مکان آن($v_B(x)$) به دست آورید. (۶ نمره)

4- اگر بدانیم که سرعت حرکت باکتری را تنها غلظت ماده‌ی سمی تعیین می‌کند. سرعت گریز این نوع باکتری را برحسب غلظت ماده سمی($v_B(C)$) بیابید به گونه‌ای که تنها شامل پارامترهای a , b و C باشد. (۶ نمره)

5- با توجه به توزیع $C(x)$، معادله‌ی $v_B(C)$ به ازای چه بازه‌ای از غلظت ماده سمی، جهت حرکت را درست معین میکند؟(۲ نمره)

6- برحسب این مدل درستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید: (۴ نمره/ نمره منفی: ۶)

a. شتاب حرکت باکتری(مشتق سرعت نسبت به زمان) همواره نامنفی است. (۲ نمره/ نمره منفی: ۳)

b. اگر غلظت ماده‌ی سمی از مقداری کمتر شود، باکتری دیگر *chemotaxis* نخواهد داشت و حرکت نمی‌کند. (۲ نمره/ نمره منفی: ۳)

ب) حال مدل خود را بسط می‌دهیم و محیط را 2بعدی در نظر میگیریم. فرض می‌کنیم که محیط ما یک ظرف بسیار کم‌عمق(مثلا یک پتری‌دیش) است و تمامی پارامترها در راستای z (در عمق‌های مختلف پتری‌دیش) ثابت و یکنواخت هستند.

1- در مدل 2بعدی علاوه بر اندازه‌ی سرعت حرکت باکتری‌ها، جهت حرکتشان هم اهمیت دارد. کدام یک از دو بردار زیر، هم‌جهت با بردار سرعت حرکت باکتری در حالت گریز است؟(۳ نمره/ نمره منفی:۶)

a. $-\frac{\partial C}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial C}{\partial y}\hat{y}$

b. $\frac{\partial C}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial C}{\partial y}\hat{y}$

سوال دو: (34 نمره)

فرض کنید دوگونه جاندار داریم که جمعیت آن‌ها را در نسل nام، با x_n و y_n نشان می‌دهیم. اگر معادلات گسسته‌ی آنها به شکل زیر باشد:

$$x_{n+1} = x_n + x_n(\gamma - \mu x_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + y_n(g - m y_n)$$

الف)

1- درستی ویا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید: (۶ نمره/ نمره منفی:۱۰)

a. معادلات دیفرنس درجه یک هستند. (۱ نمره/ نمره منفی:۱)

b. حالت $x,y = (0,0)$ یک حالت تعادل است. (۱ نمره/ نمره منفی:۱)

c. از معادلات نتیجه می‌شود که محیط برای جمعیت گونه‌های x و y به ترتیب دارای ظرفیت γ و g است. (۲ نمره/ نمره منفی:۴)

d. m از نظر ابعادی (واحد) با $\frac{g}{y_n}$ برابر است. (۲ نمره/ نمره منفی:۴)

ب) تا اینجا معادلات دو جمعیت از هم مستقل بودند، اما اگر این دو جمعیت با یکدیگر ارتباط داشته باشند و بر جمعیت یکدیگر اثر بگذارند، می‌تواند معادلات را به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$x_{n+1} = x_n + x_n(\gamma - \mu x_n) + \alpha x_n y_n$$
$$y_{n+1} = y_n + y_n(g - m y_n) + a x_n y_n$$

1- به (x,y) هایی که به ازای آن‌ها مقادیر xوy در نسل‌های بعد ثابت بماند، حالات تعادل می‌گوییم. تعداد حالات تعادل و مقادیر xوy را برای هریک بنویسید. (۶ نمره)

می‌دانیم که به دست آوردن جواب کلی برای معادلات بالا اصلا آسان نیست. پس به بررسی پایداری حول نقاط تعادل اکتفا می‌کنیم. برای این‌کار باید معادلات بالا را در نقاط تعادل، تقریب بزنیم به گونه‌ای که خطی شوند. سپس یک سیستم معادلات خطی را حل می‌کنیم.

اگر توابع f و g را مطابق روبرو تعریف کنیم.

$$x_n + x_n(\gamma - \mu x_n) + \alpha x_n y_n =: f(x_n, y_n)$$
$$y_n + y_n(g - m y_n) + a x_n y_n =: g(x_n, y_n)$$

آنگاه تغییرات آنها را حول نقاط تعادل با F, G نشان می‌دهیم.

تقریب خطی آن‌ها حول نقاط تعادلشان$(\bar{x}, \bar{y})$ به شکل زیر می‌شود.

که در آن a_{ij} درایه‌های ماتریس ژاکوبین f,g هستند که در زیر آمده است.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

2- درایه‌های ماتریس ژاکوبین بالا را با توجه به توابع f,g به دست آورید. سپس برای سادگی مقادیر g و γ را برابر1 و مقادیر μ و m را برابر 2 قرار دهید و ماتریس ژاکوبین را بازنویسی کنید. از این پس این ماتریس جدید را به عنوان ماتریس ژاکوبین در نظر بگیرید وبا آن کار کنید. (۶ نمره)

3- حال برای به دست آوردن مقادیر ویژه(*Eigen Values*) تقریبمان می‌دانیم که:

$$\lambda^2 - tr\,A\,\lambda + det\,A = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{tr\,A \pm \sqrt{tr^2 A - 4\,det\,A}}{2}$$

که در آن $tr\,A$ به معنی اثر(*trace*) ماتریس ژاکوبین است که برابر است با: $a_{11} + a_{22}$

و $det\,A$، دترمینان ماتریس ژاکوبین است و برابر با : $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

برای هر یک از حالات تعادل که به دست آوردید، ماتریس ژاکوبین به دست آورید. سپس $det\,A$ و $tr\,A$ را به دست آورید و سپس مقادیر ویژه (*Eigen Value*) های تقریب حول آن را به دست آورید. (۸ نمره)

4- با توجه به اینکه مقادیر ویژه، حقیقی هستند، و با توجه به فرم کلی جواب معادلات برای FوG در این حالت، به طور مقادیر ویژه باید در چه بازه‌ای باشند تا Fو G به صفر میل کنند و تعادل پایدار پدید آید؟ (۲ نمره)

5- برای هر یک از نقاط تعادل تعیین کنید که آیا تعادل حولشان پایدار است یا نه؟ اگر پایداری به پارامترها وابسته بود، شرط پایداری را برای آن حالت بنویسید. (۴ نمره)

سوال سه: (42نمره)

یکی از کاربردهای مهم مدلسازی بررسی تغییرات جمعیت در زمان است و یک روش برای این کار استفاده از مدل‌های رشد جمعیت است. می‌دانید که معمولا مدل‌های رشد جمعیت فرم کلی $\frac{dy}{dt} = ky$ دارند و آنچه که مدل را متمایز می‌سازد اینست که k، یا همان نرخ رشد، چه تابعی از پارامترهای دیگر باشد. به طور مثال اگر k یک عدد ثابت باشد، رشد نمایی ساده و نامحدود را خواهیم داشت.

الف) حال فرض کنید که $k = a - by, \quad a, b > 0$ باشد.

1- در این حالت $\frac{dy}{dt}$ را برحسب a,b,y به دست آورید و نمودار آن را برحسب y رسم کنید. در صورت وجود مختصات تقاط اکسترمم(مینیمم و ماکزیمم) را نیز به دست آورید. (۴ نمره)

2- به نقاطی که مشتق در آنها صفر می‌شود، نقاط بحرانی می‌گوییم.

نقاط بحرانی را برای **y** به دست آورید. (۲ نمره)

3- با توجه به نمودار رسم شده در سوال 1، phase flow مربوط به رفتار y را رسم کنید. (۲ نمره)

4- حال با توجه به اطلاعاتی که به دست آوردید، phase plane مربوط به جمعیت(جمعیت‌منفی را هم رسم کنید) را در این حالت رسم کنید. و در آن موارد زیر را مشخص کنید. (۹ نمره)

i. null-clineها در صورت وجود

ii. 2 ایزوکلاینی که null-cline نباشند

iii. مقادیر تعادل و نوع پایداری تعادل حول آن‌ها

iv. رسم چند خم جواب معادله در هر یک از محدوده‌ها(توجه کنید که شمای کلی و تغییرات کلی شیب جواب‌ها باید مشخص باشند)

5- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. (۷ نمره/ نمره منفی: ۱۱)

a. هر چه که جمعیت مثبت از جمعیت تعادل پایدار کمتر باشد، تغییرات آن در واحد زمان (dy/dt) بیشتر است. (۲ نمره/ نمره منفی: ۳)

b. معادله‌ی دیفرانسیل رشد جمعیت Autonomous است. (۱ نمره/ نمره منفی: ۲)

c. اگر خم c جواب معادله باشد، هر انتقال آن در راستای افقی هم جواب است. (۳ نمره/ نمره منفی: ۴)

d. طبق این مدل، اگر جمعیت از حد مشخصی کمتر شود، جمعیت نابود می‌شود. (۱ نمره/ نمره منفی: ۲)

ب) حال فرض کنید، می‌خواهیم جمعیت ماهی‌های یک دریاچه را که به خودی خود، معادله رشد مانند بخش الف دارند را بررسی کنیم یعنی در آن $k = a - by, \quad a, b > 0$ باشد.

1- فرض کنید که ماهی‌های این دریاچه با نرخ ثابت h، برداشت می‌شوند. یعنی در بازه‌ی زمانی واحد **h عدد** از ماهی‌ها برداشت می‌شوند. در این حالت $\frac{dy}{dt}$ را برحسب a,b,y,h به دست آورید. (۲ نمره)

2- برای هر یک از حالات زیر بازه ویا مقادیری از h را بنویسید که خواسته در آن صادق باشد. (۶ نمره)

i. y دو نقطه‌ی بحرانی نامنفی داشته باشد

ii. y فقط یک نقطه‌ی بحرانی داشته باشد

iii. y هیچ نقطه‌ی بحرانی‌ای نداشته باشد

3- برای هر یک از سه حالت بالا، phase plane رسم کنید به طوری که 3 شرط زیر را داشته باشد. (۹نمره)

i. null-clineها در صورت وجود

ii. 2 ایزوکلاینی که null-cline نباشند

iii. رسم چند جواب معادله در هر یک از محدوده‌ها(توجه کنید که شمای کلی و تغییرات کلی شیب جواب‌ها باید مشخص باشند)

4- حداکثر تعداد ماهی‌ای که می‌توان برداشت کرد به گونه‌ای که برداشت پایدار بماند، چقدر است؟(۱ نمره)

سوال چهار: (30 نمره)

First order Linear ODEs: Integrating factors

Reduced standard form: $\dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t)$, briefly $\dot{x} + px = q$ $\quad (*)$

Integrating factor: a function $u(t)$ such that $u\dot{x} + upx = \frac{d}{dt}(ux)$.

Computation: Thus $pu = \dot{u}$, or $u = e^{\int p(t)\,dt}$

Multiply (*) by u: $\frac{d}{dt}(ux) = uq$, so $x = u^{-1}\int uq\,dt$

The general solution of (*) has the form $x = x_p + cx_h$ where $x_h = u^{-1}$ is a nonzero solution of the homogeneous equation $\dot{x} + px = 0$.

(a) Around here, the ocean experiences tides. About twice a day the ocean level rises and falls by several feet. This is why small boats are often tied up to floating docks.

In roughest terms, the water level in the bay increases, over a small time interval(Δt), by an amount which is proportional to(assume its proportional by a factor of k)

(1) the difference between the ocean level and the bay level and

(2) the length of the small time interval.

Write y(t) for the height of the ocean, measured against some zero mark, and x(t) for the height of the bay, measured against the same mark. Set up the first order linear equation that describes this model. The equation must be in the form of “Reduced Standard form”, mentioned above. (4 points)

(b) Assume that the tide is high exactly every 4π hours (not a bad approximation). Suppose that the ocean height is given by y(t) = cos(ωt) (in meters and hours). What value does ω take? (2 points)

(c) Find a solution of your differential equation using integrating factors. You may need the following integral useful. (14 points)

$$\int e^{kt}\cos(\omega t)\,dt = \frac{1}{k^2+\omega^2}e^{kt}(k\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t))+c$$

(d) Prove that integral mentioned above is true. By differentiating the right-hand side of the integral and showing that it's equal to the left-hand side. (10 points)